ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES B

FILIERE PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

DURÉE : 2 h 30 heures

N.B. : Ce *sujet comporte 2 pages*

Les calculatrices sont autorisées

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

PARTIE I

1°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. On pose $z_n = e^{\frac{2i\pi}{n}} = exp(\frac{2i\pi}{n})$.

a) Calculer selon $r \in \mathbb{Z}$ la valeur de: $I_{r,n} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_n)^{kr} = \sum_{k=0}^{n-1} exp(\frac{2ikr\pi}{n})$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose: $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} exp(\frac{2i\pi k^2}{n})$.

Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a: $\sum_{k=0}^{n-1} (z_n)^{(k+j)^2} = G_n$

(on pourra poser $j = r + qn \ldots$).

c) Montrer en particulier que si n est un entier impair (seulement pour cette question), alors $G_n\overline{G_n} = n$ et préciser $|G_n|$.

2°) a) Soit A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que pour tous $(r,s) \in [\![1,n]\!]^2$ le coefficient d'indice (r,s) de A_n vaut $a_{r,s} = (z_n)^{(r-1)(s-1)} = exp(\frac{2i(r-1)(s-1)\pi}{n})$.

Expliciter les coefficients de $(A_n)^2$ et en déduire que $(A_n)^4 = n^2 I_n$ où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer que la matrice A_n est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), et préciser les valeurs propres possibles de A_n dans $\mathbb{C}$.

c) Donner une relation entre G_n, n et les quatre entiers:

$a_n = rg(A_n - \sqrt{n}I_n)$, $b_n = rg(A_n + \sqrt{n}I_n)$, $c_n = rg(A_n - i\sqrt{n}I_n)$, $d_n = rg(A_n + i\sqrt{n}I_n)$

où l'on a noté ici "rg" pour le rang des matrices concernées.

d) On suppose ici $n = 4$. Calculer G_4 et a_4, et en déduire les valeurs propres de A_4.

PARTIE II

3°) a) Justifier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de $\varphi : t \mapsto \dfrac{e^{it}-1}{t\sqrt{t}}$.

b) En déduire l'existence de $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt$.

c) En déduire l'existence de $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(\displaystyle\int_0^A e^{iu^2}\,du\right)$, et de $g_n = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(\displaystyle\int_0^A e^{2i\pi n u^2}\,du\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer g_n en fonction de g_1 et de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $f : [0,2n\pi] \to \mathbb{C}$ continue et de classe C^1 par morceaux.

a) Pour chaque entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, en utilisant la série de Fourier de f_k, application périodique et de période 2π telle que pour tout $t \in [0,2\pi[$ on ait $f_k(t) = f(2k\pi + t)$, montrer que :

$$\pi\big(f(2k\pi) + f(2(k+1)\pi)\big) = \lim_{M\to+\infty} \left(\sum_{m=-M}^{M} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(t)e^{-imt}\,dt\right).$$

b) En déduire :

$$\frac{f(0)+f(2n\pi)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(2k\pi) = \lim_{M\to+\infty} \left(\sum_{m=-2M}^{2M} \int_0^n f(2\pi t)e^{-2i\pi mt}\,dt\right).$$

5°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note toujours $G_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{n}}$ et $g_n = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(\displaystyle\int_0^A e^{2i\pi n u^2}\,du\right)$.

a) Montrer que pour $m \in \mathbb{Z}$, on a:

$$\int_0^1 e^{2in\pi(t^2-mt)}\,dt = \varepsilon_n(m) \int_{\frac{m}{2}-1}^{\frac{m}{2}} e^{2i\pi n u^2}\,du,$$

avec : $\varepsilon_n(m) = 1$ si m est un entier pair et $\varepsilon_n(m) = (-i)^n$ si m est un entier impair.

On pourra effectuer le changement de variable défini par: $u = \frac{m}{2} - t$.

b) En appliquant le résultat de la question précédente 4°) à la fonction définie par: $f(t) = e^{\frac{it^2}{2\pi n}} = exp(\frac{it^2}{2\pi n})$ pour $t \in [0,2n\pi]$, calculer G_n et g_n en fonction de n en précisant d'abord le cas $n = 1$.

PARTIE III

6°) a) On considère ici $\mathbb{R}^2$ comme plan euclidien orienté de telle sorte que la base canonique soit orthonormale directe.

On considère l'arc paramétré de $\mathbb{R}^2$ défini par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad C(t) = \int_0^t \cos(u^2)\,du, \quad S(t) = \int_0^t \sin(u^2)\,du, \qquad \Phi(t) = (C(t), S(t))$$

Montrer que cet arc est régulier et de classe C^∞ et préciser les différentes abcisses curvilignes. Que vaut la courbure en $M = \Phi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$?

Que peut-on dire des vecteurs $\Phi'(t)$ et $\Phi''(t)$ en tout point $t \in \mathbb{R}^*$?

b) Préciser la parité ou l'imparité des fonctions C et S définies ci-dessus. Justifier que ces fonctions C et S sont développables en série entière: on précisera leur développement ainsi que le rayon de convergence.